JOURNAL OF APPLIED SCIENCE AND SOCIAL SCIENCE
eISSN 2229-3113 pISSN 2229-3205
Volume 14 Issue 12, December 2024
Impact factor: 2019: 4.679 2020: 5.015 2021: 5.436, 2022: 5.242, 2023: 6.995, 2024 7.75

LAW OF LARGE NUMBERS FOR NEGATIVE ORTHOGONAL DEPENDENT RANDOM VARIABLES TAKING VALUES IN GILBERT SPACE

Maqsimova Sarvinoz Valijon kizi

Doctoral student of the 1st stage of Andijan State University

Abstract: In this thesis, a moment inequality for the sum of negatively orthant dependent random variables taking values in a Hilbert space is applied, and the law of large numbers is proved. The random variables satisfy the condition of negative orthant dependence coordinatewise.

Keywords: Random variables in Hilbert space, negatively orthant dependent random variables, moment inequalities, law of large numbers.

Annotatsiya: Ushbu tezisda Gilbert fazosida qiymat qabul qiluvchi manfiy ortant tasodifiy miqdorlar yig'indisi uchun moment tengsizligini qo'llab katta sonlar qonuni isbotlangan. Bunda tasodifiy miqdorlar koordinatalar bo'yicha manfiy ortantlik shartini qanoatlantiradi.

Kalit so'zlar: Gilbert fazosida tasodifiy miqdorlar, manfiy ortant tasodifiy miqdor, moment tengsizliklar, katta sonlar qonuni.

Anotatsiya: В этой диссертации применяется моментное неравенство для суммы случайных величин с отрицательной ортантной зависимостью, принимающих значения в гильбертовом пространстве, и доказан закон больших чисел. Случайные величины удовлетворяют условию отрицательной ортантной зависимости по координатам.

Ключевые слова: случайные величины в гильбертовом пространстве, случайные величины с отрицательной ортантной зависимостью, моментные неравенства, закон больших чисел.

Manfiy bog'liqlik va manfiy assostsirlanganlik tushunchalari 1960-yil o'rtalarida kiritilgan. Hozirgi paytda bu shartlarni qanoatlantiruvchi tasodifiy miqdorlar uchun limit teoremalar yaxshi o'rganilgan bo'lsa ham funksional fazolarda qiymat qabul qiluvchi manfiy bog'liqlik shartlarini qanoatlantiruvchi tasodifiy miqdorlar uchun limit teoremalar nisbatan kam o'rganilgan. Manfiy bog'liqlik shartlarini qanoatlantiruvchi tasodifiy elementlar uchun limit teoremalar isbotlashda moment tengsizliklari muhim rol o'ynaydi.

Tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{X_n, n \geq 1\}$ uchun ortant bog'liqlik shartini kiritamiz

Ta'rif 1. $\{X_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ chekli tasodifiy miqdorlar sinfi

a) $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ uchun manfiy yuqori ortant bog'liq deyiladi , agar

JOURNAL OF APPLIED SCIENCE AND SOCIAL SCIENCE
eISSN 2229-3113 pISSN 2229-3205
Volume 14 Issue 12, December 2024
Impact factor: 2019: 4.679 2020: 5.015 2021: 5.436, 2022: 5.242, 2023: 6.995, 2024 7.75

$$P(X_i > x_i, i = 1,2, \dots, n) \leq \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x_i)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa

b) $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ uchun manfiy quyi ortant bog'liq deyiladi , agar

$$P(X_i \leq x_i, i = 1,2, \dots, n) \leq \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa

c) Agar ushbu sinf manfiy yuqori ortant bog'liq ham manfiy quyi ortant bog'liq bo'lsa , u manfiy ortant bog'liq deyiladi.[3]

Agar ixtiyoriy n da $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdor manfiy ortant bog'liq bo'lsa, $\{X_n,\ n \geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi manfiy ortant bog'liq deyiladi.

Teorema 1. $X_1, \dots, X_n$ manfiy bog'liq miqdorlar bo'lsin .Bu tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'ladi, agar faqatgina $Cov(X_i, X_j) = 0$ bo'lsa, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$ da.[4]

`**Lemma 1.** Har qanday $q > 2$ uchun faqatgina q ga bog'liq shunday $C(q)$ musbat o'zgarmas mavjudki, agar $\{X_n, n \geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi manfiy ortant va har bir $n \geq 1$ uchun $EX_n = 0$ bo'lsa, u holda barcha $n \geq 1$ uchun

$$E\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^q \leq C(q)\left\{\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^q + \left(\sum_{i=1}^{n} EX_i^2\right)^{q/2}\right\}$$

o'rinli bo'ladi.[1]

Lemma 2. Har qanday $q \geq 2$ uchun faqatgina q ga bog'liq shunday $C(q)$ musbat o'zgarmas mavjudki, agar $\{X_n, n \geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi manfiy ortant va har bir $n \geq 1$ uchun $EX_n = 0$ bo'lsa, u holda barcha $n \geq 1$ uchun

$$E \max_{1 \leq j \leq n} \left|\sum_{i=1}^{j} X_i\right|^q \leq C(q)(\log(4n))^q \left\{\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^q + \left(\sum_{i=1}^{n} EX_i^2\right)^{q/2}\right\}$$

o'rinli bo'ladi.[1]

Natija 1. $0 < t \leq 1, p \geq t$ bo'lsin, u holda $E|S_n|^p \leq C(p,t)\left(M_{p,n} + M_{t,n}^{p/t}\right)$

bo'ladi. Bu yerda $C(p,t)$ p va t ga bog'liq o'zgarmas.[2]

Natija 2. $1 \leq t \leq 2, p \geq t$ bo'lsin. Agar $EX_k = 0, k = 1, \cdots, n$ bo'lsa, u holda $E|S_n|^p \leq C(p,t)\left(M_{p,n} + M_{t,n}^{p/t}\right)$bo'ladi.

JOURNAL OF APPLIED SCIENCE AND SOCIAL SCIENCE
eISSN 2229-3113 pISSN 2229-3205
Volume 14 Issue 12, December 2024
Impact factor: 2019: 4.679 2020: 5.015 2021: 5.436, 2022: 5.242, 2023: 6.995, 2024 7.75

Lemma 3. $1 \leq t \leq 2$ va $EX_k = 0, k = 1,2,\cdots,n$ bo'lsin. U holda har qanday $h, x, y > 0$ uchun

$$P(|S_n| \geq x) \leq \sum_{k=1}^{n} P(|X_k| \geq y) + 2\exp\left\{\frac{e^{hy} - 1 - hy}{y^t} M_{t,n} - hx\right\}$$

bo'ladi.

H-separabel Gilbert fazosi bo'lsin. Gilbert fazosida norma quyidagicha kiritiladi:$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}$ ($\langle \cdot\ ,\ \cdot \rangle$ skalyar ko'paytma)

$\{e_i, i \geq 1\}$ Gilbert fazosidagi ortonormal basis bo'lsin. Gilbert fazosida qiymat qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi $\{X_n\,, n \geq 1\}$ ning har bir elementi yoyilmasi $X_n = \sum_{i=1}^{\infty} X_n^{(i)} e_i\,,\ X_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \ldots)$

ko'rinishga ega. Ushbu tasodifiy miqdorlar yig'indisini tuzamiz

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Endi yig'indining $p-$ tartibli momenti uchun tengsizlikni keltiramiz. Agar $\{X_n, n \geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi har bir $i = 1,2, \ldots$ da koordinatalari bo'yicha manfiy ortant bog'liqlik shartini qanoatlantirsin.

Teorema 2. Agar har bir $n \geq 1$ uchun $EX_n = 0$ bo'lsa, u holda har qanday $0 < p \leq 2$ uchun faqatgina p ga bog'liq shunday $C(p)$ mavjudki, u holda barcha $n \geq 1$ uchun

$$E\left\|\sum_{i=1}^{n} X_i\right\|^p \leq C(p) \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} E\left|X_k^{(i)}\right|^p$$

o'rinli bo'ladi.

Teorema 3. $\{X_n, n \geq 1\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi mos koordinatalari bo'yicha manfiy ortant bog'liq bo'lib, har bir $k = 1,2, \ldots$ uchun $\sum_{i=1}^{\infty} E\left|X_n^{(i)}\right|^p \leq M$ bo'lsa, u holda $1 \leq p \leq 2$ bo'lganda bu ketma ketlik uchun katta sonlar qonuni o'rinli bo'ladi, ya'ni

$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{P} 0$$

Gilbert fazosida qiymat qabul qiluvchi koordinatalari bo'yicha manfiy ortant bog'liq bo'lgan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar uchun katta sonlar qonunini o'rinli bo'lishi uchun $\sum_{i=1}^{\infty} E\left|X_n^{(i)}\right|^p \leq \infty$ shart yetarli bo'ladi.

JOURNAL OF APPLIED SCIENCE AND SOCIAL SCIENCE
eISSN 2229-3113 pISSN 2229-3205
Volume 14 Issue 12, December 2024
Impact factor: 2019: 4.679 2020: 5.015 2021: 5.436, 2022: 5.242, 2023: 6.995, 2024 7.75

References:

Asadian, N, Fakoor, V, Bozorgnia, A: Rosenthal's type inequalities for negatively orthogonal dependent random variables. J. Iran. Stat. Soc. 5(1-2), 69-75 (2006)

D. Qui, Q. Wu, P. Chen. Complete convergence for negatively correlated dependent random variables. Journal of inequalities and applications 2014.

Fakoor, V. and Azarnoosh, H. A. (2005), Probability inequalities for sums of negatively dependent random variables. Pak. J. Stat.,21(3), 257–264.

Paulo Eduardo Oliveira: Asymptotics for Associated Random Variables (2012)